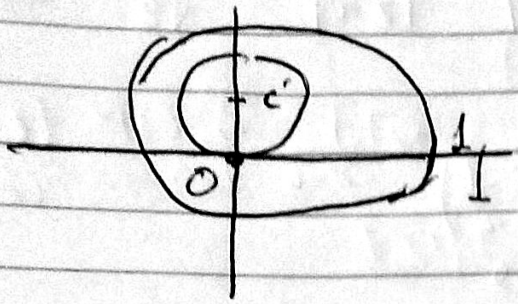
25/05/2017

• Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}, \quad z_0=i$$

1) $B(i,1)$
2) $\Delta(i,1,\sqrt{2})$
3) $\Delta(i,\sqrt{2},+\infty)$



1) $f(z)=\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu (z-i)^\nu$

Είναι $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=\frac{-1}{z}+\frac{1}{z-1}$

2) $z\in\Delta(i,1,\sqrt{2}) \Rightarrow 1|z-i|<\sqrt{2}$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-i+i} \qquad \sum_{\nu=0}^{+\infty}\theta^\nu=\frac{1}{1-\theta}, \ |\theta|<1$$

$$=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1+\underbrace{\frac{i}{z-i}}_{\theta}}=\frac{1}{z-i}\sum_{\nu=0}^{+\infty}(-1)^\nu\frac{i^\nu}{(z-i)^\nu}=\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{i^{2\nu+1}}{(z-i)^{2\nu+1}}$$

$$=\frac{1}{z-i}=\frac{1}{z-i+i}=\frac{1}{i-1}\cdot\frac{1}{\left(\frac{z-i}{i-1}\right)+1}$$

$$=\frac{1}{i-1}\sum_{\nu=0}^{+\infty}(-1)^\nu\frac{(z-i)^\nu}{(i-1)^\nu}=\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\nu}{(i-1)^{\nu+1}}(z-i)^\nu$$

Οπότε έχω συνολικά

$$f(z)=\underbrace{\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{-i^{2\nu+1}}{(z-i)^{2\nu+1}}}_{\text{κανονικό μέρος}}+\underbrace{\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\nu}{(i-1)^{\nu+1}}(z-i)^\nu}_{\text{ολόμορφο μέρος}}$$

3) $z \in \Delta(i, \sqrt{2}, +\infty) \Rightarrow \sqrt{2} < |z-i|$.

- $\frac{1}{z} = \dots = \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{i^{2v+1}}{(z-i)^{v+1}}$ γιατί είναι

$$\left|\frac{i}{z-i}\right| = \frac{1}{|z-i|} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

- $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-i+i-1} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1+\underbrace{\left(\frac{i-1}{z-i}\right)}_{\theta}} = \frac{1}{z-i} \sum_{v=0}^{+\infty} (-1)^v \cdot \frac{(i-1)^v}{(z-i)^v}$

$$= \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{(-1)^v (i-1)^v}{(z-i)^{v+1}}.$$

Άρα $f(z) = \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{-i^{2v+1}}{(z-i)^{v+1}} + \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{i^{2v}(i-1)^v}{(z-i)^{v+1}}$.

$$= \sum_{v=0}^{+\infty} \underbrace{\left(-i^{2v+1} + i^{2v}(i-1)^v\right)}_{b_{-v}} \cdot \frac{1}{(z-i)^{v+1}}.$$

b_{-v} (το - είναι τυπικό).

Παράδειγμα: Δίνεται $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ με κέντρο το 0. Να γραφεί σε ανάπτυγμα Laurent με κέντρο το 0.

Λύση

$z \in \Delta(0, 0, +\infty) \Rightarrow |z| > 0$

κέντρο, μικρή ακτίνα, μεγάλη ακτίνα.

Εδώ η f είναι ολόμορφη και έχει ανάπτυγμα Taylor.

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(z)}{z} = \frac{1}{z}\sigma\upsilon\nu(z) = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{3!} - + \dots$$

(Έχω $z_0 = \pi$ τώρα) 1) $B(\pi, \pi) \Rightarrow |z-\pi| < \pi$
2) $\Delta(\pi, \pi, +\infty) \Rightarrow |z-\pi| > \pi$.

<u>για το 1</u>

$$f(z) = \frac{\sigma\upsilon\nu(z)}{z} = \frac{-\sigma\upsilon\nu(z-\pi)}{z-\pi+\pi} = -\sigma\upsilon\nu(z-\pi)\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\frac{z-\pi}{\pi}}$$

$$= -\sum_{\nu=0}^{+\infty}(-1)^\nu\frac{(z-\pi)^{2\nu}}{(2\nu)!}\cdot\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{(z-\pi)^k}{\pi^k}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\nu(-1)^k}{(2\nu)!\,\pi^k}(z-\pi)^{2\nu+k} = \lambda.$$

Θέτω $2\nu + k = \lambda$

$k = \lambda - 2\nu \geq 0$
$\Rightarrow 2\nu \leq \lambda$
$\Rightarrow \nu \leq \left[\frac{\lambda}{2}\right]$.

$$= \sum_{\lambda=0}^{+\infty}\left[\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{\lambda}{2}\right]}\frac{(-1)^\nu(-1)^{\lambda-\nu}}{(2\nu)!\,\pi^{\lambda-2\nu}}\right](z-\pi)^\lambda$$

π.χ. $$a_5 = \sum_{\nu=0}^{2}\frac{(-1)^\nu(-1)^{5-2\nu}}{(2\nu)!\,\pi^{5-2\nu}}.$$

<u>για τον δακτύλιο:</u>

$|z-\pi| > \pi$

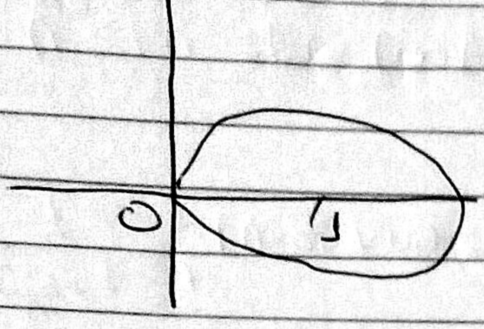
$$f(z) = \frac{-\sigma\upsilon\nu(z-\pi)}{z-\pi+\pi} = \frac{-\sigma\upsilon\nu(z-\pi)}{1+\frac{\pi}{z-\pi}} =$$

$$= -\sum_{\nu=0}^{+\infty}(-1)^\nu\frac{(z-\pi)^{2\nu}}{(2\nu)!}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\pi^k}{(z-\pi)^{k+1}}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^\nu(-1)^k\pi^k}{(2\nu)!}\cdot(z-\pi)^{2\nu-k} = \lambda.$$

$z_0=1$ τότε $f(z)=\dfrac{συν(z)}{z} = \dfrac{συν(z-1+1)}{z-1+1}$

$$= \frac{συν(z-1)συν(1) - ημ(z-1)ημ(1)}{(z-1)+1}.$$



1) $B(1,1)$

2) $Δ(1,1,+\infty)$

$$z \in B(1,1) \Rightarrow |z-1|<1$$

$$\left[συν(1)\sum_{ν=0}^{+\infty}(-1)^ν \frac{(z-1)^{2ν}}{(2ν)!} - ημ(1)\sum_{ν=0}^{+\infty}(-1)^ν \frac{(z-1)^{2ν+1}}{(2ν+1)!}\right]$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k (z-1)^k$$

$$= \sum_{λ=0}^{+\infty} a_λ (z-ν)^λ \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k (z-k)^k$$

$$= \sum_{λ=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_λ (-1)^k (z-1)^{\overbrace{λ+k}^{=μ}}$$

όπου $a_λ = \begin{cases} (-1)^ν \dfrac{1}{2ν} συν(1), & k=2ν \\ -(-1)^ν \dfrac{1}{(2ν+1)} ημ(1), & k=-2ν \end{cases}$

$$λ+k=μ \Rightarrow k=μ-λ \geq 0 \Rightarrow λ \leq μ$$

$$\Rightarrow \sum_{μ=0}^{+\infty}\Bigg(\underbrace{\sum_{λ=0}^{μ} a_λ (-1)^{μ-λ}}\Bigg)(z-1)^ν$$

συντελεστής αναπτύγματος Taylor

1) $B(1,1) \ni z : |z-1| < 1$.
2) $\Delta(1, 1, +\infty)$: $|z-1| > 1$.

$$\frac{1}{z-1+1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{z-1}\right)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{v} \frac{1}{(z-1)^{v+1}}.$$

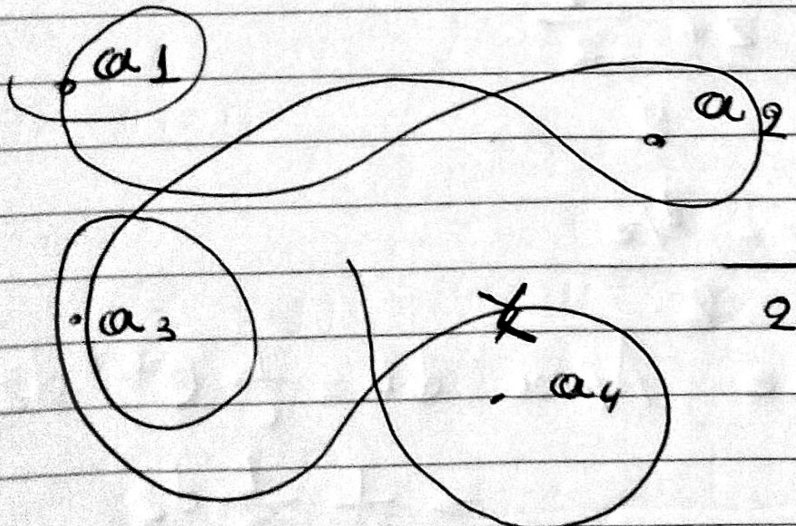
- $f(z) = \frac{\cos(z)}{z} \cdot e^{z}$, $z_0 = 0$ στο $\Delta(0, 0, +\infty)$
  $\hookrightarrow |z| > 0$.

$$\frac{1}{z} \sum_{v=0}^{+\infty} (-1)^{v} \frac{z^{2v}}{(2v)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k}}{k!}$$

$$= \sum_{v=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{v}}{(2v)!\,k!} z^{2v+k}.$$

$$= \sum_{v=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{v}}{(2v)!\,(k)!} \cdot z^{2v+k-1} \text{ " } \lambda.$$

Θέτω $2v+k-1 = \lambda$.
$\Rightarrow k = \lambda - 2v + 1 \geq 0$ Άρα $\sum_{\lambda=-1}^{+\infty} \left(\sum_{v=0}^{\left[\frac{\lambda+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{v}}{(2v)!\,(\lambda-2v+1)} z^{\lambda} \right)$
$\Rightarrow v \leq \frac{\lambda+1}{2}$



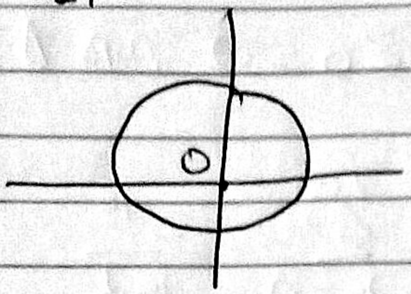
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{v=1}^{k} I(\gamma, a_v).$$

$\underbrace{\operatorname{Res}_{a_v} f}$

ολοκληρωτικά υπόλοιπα

- $f(z)=\text{συν}\left(\frac{1}{z}\right)$ θέλω το $\underset{0}{\text{Res}} f=0$ γιατί η $\text{συν}\left(\frac{1}{z}\right)$ είναι άρτια συνάρτηση.

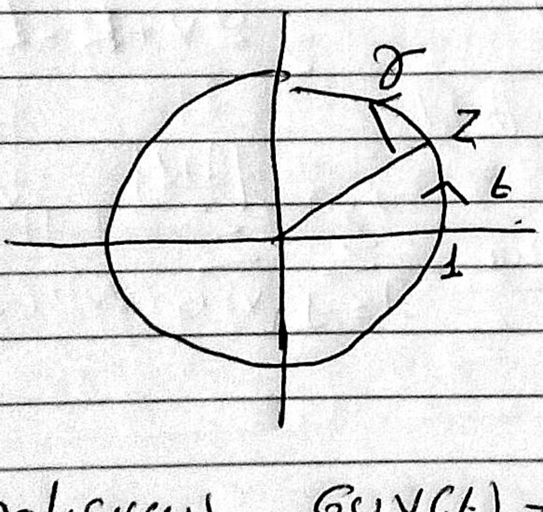
- $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$, θέλω $\underset{0}{\text{Res}} f = \frac{-1}{z}+\frac{1}{z-1}$.



$\underset{0}{\text{Res}} f = 1$.

$$I=\int_0^{2\pi} f(\text{συν}(t), \text{ημ}(t))\,dt \quad \text{π.χ.} \quad \frac{1}{(2+\text{ημ}\,t)^2}$$

θέτω $z=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$.



$$e^{it}=z=\text{συν}(t)+i\,\text{ημ}(t)$$
$$e^{-it}=\frac{1}{z}=\bar{z}=\text{συν}(t)-i\,\text{ημ}(t)$$

Επομένως $\text{συν}(t)=\dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}$

$$\text{ημ}(t)=\frac{z-1/z}{2}.$$

Ακόμη $i e^{it}dt=dz$, Άρα $dt=\frac{1}{i}e^{-it}dz$

$$=\frac{1}{i}\frac{1}{z}dz.$$

Άρα συνολικά έχουμε ότι

$$I = \int_\gamma f\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{i}\frac{1}{z}\,dz$$

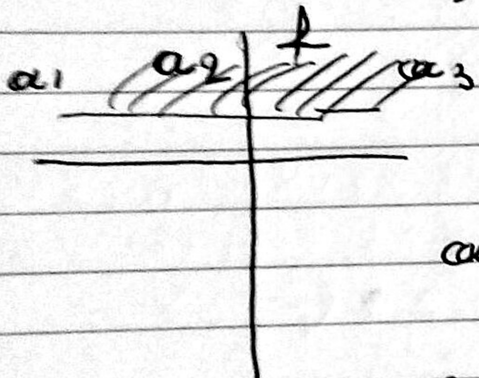
$$= -i\int_\gamma \frac{1}{z} f\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)dz$$

Εφαρμόζω τον τυπο του Cauchy.

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, με $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, ρητη μf

  όταν $\deg(q) - \deg(p) \geq 2$ τότε

  $\exists \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$



$f(z)$

$a_1, a_2, \ldots, a_k$ όπου $Im(a_k) > 0$

Άρα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\nu=0}^{+\infty} \mathrm{Res}_{a_\nu} f$ στα σημεία